



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

## **Учебное пособие**

### **Часть 1**

# **«Теоретическая механика. Динамика»**

Авторы  
Высоковский Д.А.,  
Кириллова Е.В.

Ростов-на-Дону, 2024

## Аннотация

Учебное пособие для студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» является первой частью раздела динамика курса теоретической механики, и ее содержание предусматривает материал, который нужен для изучения сопротивления материалов, строительной механики и других строительных дисциплин. В основе ее лежит курс механики, читаемый авторами для студентов различных специальностей в АСА ДГТУ.

Учебное пособие рассчитано на студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

## Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»

Высоковский Д.А.

ст. преподаватель кафедры «Техническая механика»

Кириллова Е.В.



## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>1. Основные законы динамики .....</b>	<b>6</b>
<b>2. Задачи динамики точки. Дифференциальные уравнения движения точки.....</b>	<b>9</b>
2.1. Решение первой задачи динамики .....	10
2.2. Решение второй (основной) задачи динамики .....	10
2.3. Динамика несвободной материальной точки.....	12
2.4. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения .....	12
<b>3. Прямолинейные колебания точки .....</b>	<b>13</b>
3.1. Свободные колебания без учета сил сопротивления.....	13
3.2. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки.....	18
3.3. Сложение колебаний .....	24
3.4. Свободные колебания в поле постоянной силы. ....	35
3.5. Параллельное включение упругих элементов. ....	36
3.6. Последовательное включение упругих элементов. ....	37
3.7. Вынужденные колебания. Резонанс. ....	38
3.8. Свободные колебания с вязким сопротивлением. ....	41
3.9. Вынужденные колебания с вязким сопротивлением. ....	44
<b>4. Относительное движение точки .....</b>	<b>46</b>
<b>5. Момент инерции. ....</b>	<b>49</b>
5.1. Момент инерции тела относительно оси, радиус инерции. ....	49
5.2. Теорема Гюйгенса.....	51
5.3. Определение моментов инерции некоторых однородных тел	52
<b>6. Количество движения точки. Импульс силы.....</b>	<b>55</b>
6.1. Теорема об изменении количества движения точки .....	56
6.2. Теорема об изменении момента количества движения. ....	57
<b>7. Кинетический момент твердого тела в частных случаях его движения .....</b>	<b>61</b>
7.1. Кинетический момент поступательно движущегося твердого тела	61
7.2. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки .....	61

7.3. Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси .....63

**8. Кинетический момент свободного твердого тела.....64**

8.1. Работа.....64

8.2. Консервативные силы. ....67

8.3. Мощность.....68

8.4. Теорема об изменении кинетической энергии.....69

8.5. Принцип Даламбера для материальной точки.....70

## ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Динамика» завершает изучение курса теоретической механики, на материале которой изучаются дисциплины «Сопротивление материалов», «Прикладная механика», «Теория механизмов и машин», «Строительная механика», «Основы конструирования машин», ряда специальных инженерных дисциплин, где изучаются процессы обработки металлов давлением, механическое оборудование, автоматическое управление, автоматизация и комплексная механизация различных объектов, осуществление технологических процессов и так далее.

Данное учебное пособие предназначено для обучающихся по специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» по направлению 08.03.01 «Строительство» при изучении следующих тем дисциплин:

- дифференциальные уравнения движения точки и их интегрирование;
- общие теоремы динамики точки;
- прямолинейные колебания точки.

Раздел «Динамика» завершает формирование минимума знаний, необходимых специалисту для понимания механических явлений, и в то же время вырабатывает материалистическое мировоззрение.

Материал способствует овладению теоретическими основами компетенций, формирование которых предусмотрено Рабочей программой дисциплины для направления подготовки «Строительство».

## 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Динамика представляет собой часть кинетики, посвященную изучению движения материальных тел (или вообще механических систем) в зависимости от действующих на них сил. Движение тела определяется движением всех материальных точек (или частиц), его составляющих; поэтому естественно начать изучение динамики с изучения движения материальной точки. Под материальной точкой мы понимаем тело столь малых размеров, что различием в движении его частиц можно пренебречь. Материальную точку можно рассматривать как точку (геометрическую), имеющую массу. В дальнейшем часто для краткости материальную точку будем называть просто точкой.

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно – исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем (1638 г.), гласит: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.* Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции*.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи — пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. Из него следует, что если  $F = Q$ , то точка покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью; ускорение точки при этом равно нулю; если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной системой отсчета* (иногда ее условно называют неподвижной). По данным опыта, для нашей Солнечной системы инерциальной является система отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой – нибудь силы. Он гласит: *производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на нее силе*. Другая ее формулировка: *произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на точку силе*.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, так как две разные точки при действии одной и той же силы получают одинаковые ускорения только тогда, когда будут равны их массы; если же массы будут разные, то точка, масса которой больше (т. е. более инертная), получит меньшее ускорение, и наоборот.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они, как известно, будут эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей  $R$ , равной геометрической сумме этих сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\vec{a} = \vec{R} \text{ или } m\vec{a} = \sum \vec{F}_i.$$

Этот же результат можно получить, используя вместо аксиомы параллелограмма *закон независимости действия сил*, согласно которому при одновременном действии на точку нескольких сил каждая из них сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщила бы, действуя одна.

**Вес тела и его масса.** На все тела, находящиеся вблизи земной поверхности, действует сила тяжести  $P$ , численно равная весу тела. Опытным путем установлено, что под действием силы  $P$  любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение  $g$ . Это ускорение, сообщаемое телу силой тяжести, называют для краткости *ускорением силы тяжести*, или *ускорением свободного падения*. Для этого движения имеем:

$$P = mg \text{ или } m = \frac{P}{g}$$

Равенство позволяет определить вес тела, если известна его масса, и наоборот; оно устанавливает, что *вес тела равен его массе, умноженной на ускорение силы тяжести, или масса тела равна его весу, деленному на ускорение силы тяжести*. Вес тела, как и величина  $g$ , изменяется с изменением широты и высоты над уровнем моря; масса же является величиной, для данного тела (или материальной точки) неизменной.



## 2. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Задачами динамики точки являются:

- 1) первая задача динамики – зная закон движения материальной точки, определить, под действием какой силы такое движение может происходить;
- 2) вторая задача динамики – зная действующие на материальную точку силы, а также ее начальное положение и начальную скорость, определить закон движения точки. Вторая задача является в динамике основной.

Задачи динамики точки решаются с помощью соответствующих дифференциальных уравнений, связывающих координаты движущейся точки с действующими на нее силами. Эти уравнения получаются из второго (основного) закона динамики. Представим уравнение, выражающее второй закон Ньютона, в виде

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$$

где  $r$  — радиус – вектор точки по отношению к инерциальной системе отсчета  $Oxyz$ ,  $F = \Sigma F_k$  — равнодействующая приложенных к точке сил (рис. 1). Полученное уравнение – дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в векторной форме.

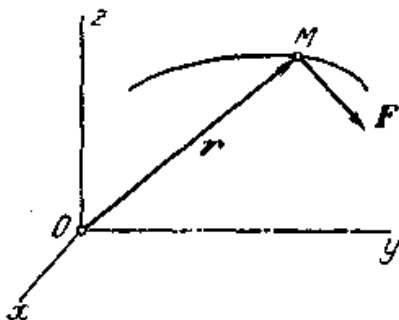


Рис. 1

Проецируя обе части равенства на оси  $Oxyz$ , получим дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в прямоугольных декартовых координатах:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz} \end{cases}$$

## 2.1. Решение первой задачи динамики

Задача состоит в том, чтобы, зная закон движения точки, т. е. кинематические уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

найти действующую силу, т. е.  $F_x, F_y, F_z$ . Задача, как видим, легко решается с помощью уравнений и сводится к вычислению вторых производных по времени от заданных функций.

## 2.2. Решение второй (основной) задачи динамики

Эта задача состоит в том, чтобы, зная действующую силу  $F$ , найти закон движения точки, т. е. кинематические уравнения. Сила  $F$  может вообще зависеть от времени, от положения точки в пространстве и от скорости ее движения, т. е.  $F = F(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . Поэтому дифференциальные уравнения будут в общем случае иметь следующий вид

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}$$

Нахождение закона движения данной точки сводится к интегрированию системы, т. е. системы трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых неизвестными функциями являются координаты движущейся точки  $x, y, z$ , а аргументом – время  $t$ . Проинтегрировав эту систему дифференциальных уравнений, получим  $x, y, z$  в функциях времени и шести произвольных постоянных, т. е. найдем общее решение (общие интегралы) системы в виде

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned}$$

Наличие в правых частях уравнений произвольных постоянных указывает на то, что под действием данной силы точка может совершать не какое – то вполне определенное движение, а целый класс движений, имеющих разные законы при разных значениях постоянных  $C_i, i=1..6$ .

Физически этот результат объясняется тем, что точка, на которую начинает действовать некоторая сила, будет двигаться по – разному в зависимости от так называемых начальных условий, т. е. от начального положения и начальной скорости этой точки. Например, движение свободной материальной точки под действием силы тяжести может быть прямолинейным или криволинейным в зависимости от направления ее начальной скорости.

Чтобы сделать соответствующую задачу динамики определенной, надо кроме действующих сил задать начальные условия, т. е. для некоторого момента времени  $t = t_0$  (начальный момент) задать: начальное положение точки  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  и начальную скорость точки  $\dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0$

## 2.3. Динамика несвободной материальной точки

Уравнения и законы динамики были выведены для свободной материальной точки. Рассмотрим теперь движение несвободной материальной точки, свобода движения которой ограничена связями (рис. 2).

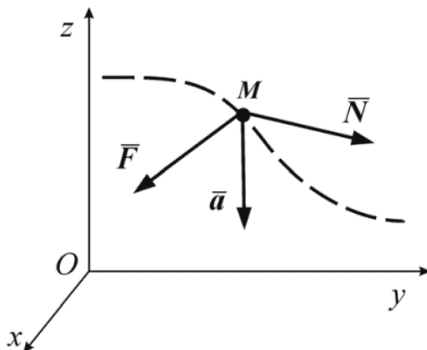


Рис. 2

Основное уравнение динамики несвободной материальной точки можно получить с помощью принципа освобождения связей: не нарушая движения несвободной точки, её можно сделать свободной, если отбросить связи и заменить их реакциями.

Применяя к «свободной» точке М, движущейся под действием сил  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$  основное уравнение динамики получаем

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$$

Это – основное уравнение динамики несвободной точки.

## 2.4. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения

Прямолинейное (вдоль оси  $x$ ) движение свободной материальной точки определяется одним дифференциальным уравнением второго порядка и двумя начальными условиями

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}(t, x, \dot{x})$$

при  $t = t_0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$

### 3. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

#### 3.1. Свободные колебания без учета сил сопротивления.

Движения, обладающие той или иной степенью повторяемости, называются **колебаниями**.

Колебания свойственны всем явлениям природы: пульсирует излучение звезд, с высокой степенью периодичности вращаются планеты Солнечной системы, в земной ионосфере и атмосфере циркулируют потоки заряженных частиц, ветры возбуждают колебания воды на поверхности водоемов. Внутри любого живого организма непрерывно происходят разнообразные, ритмично повторяющиеся процессы, например, с удивительной надежностью бьется сердце, даже психика людей подвержена колебаниям. В виде сложнейшей совокупности колебаний частиц и полей можно представить «устройство» микромира.

Если значения физических величин, изменяющихся в процессе движения, повторяются через равные промежутки времени, то такое движение называется **периодическим**. Примерами периодического движения могут служить движение планет вокруг Солнца, движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания и др. В зависимости от физической природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают механические и электромагнитные колебания. Колебательную систему вне зависимости от ее физической природы называют **осциллятором**. Примером осциллятора может служить колеблющийся груз, подвешенный на пружине или нити.

**Полным колебанием** называют один законченный цикл колебательного движения, после которого оно повторяется в том же порядке.

По способу возбуждения колебания делят на: **свободные** (собственные), происходящие в представленной самой себе системе около положения равновесия после какого – либо первоначального воздействия; **вынужденные** – происходящие при периодическом внешнем воздействии (например, колебания моста при прохождении по нему поезда или раскачивание человеком качелей); **параметрические** – происходящие при изменении какого – либо параметра колебательной системы; **автоколебания** – происходящие в системах, самостоятельно регулирующих поступление внешних воздействий.

**Собственные** колебания являются не только самыми распространенными, но и самыми важными с точки зрения теории

колебаний, так как условия возникновения и характер всех других типов колебаний существенно зависят от характера собственных колебаний.

Начнем с изучения свободных колебаний точки без учета сил сопротивления. Рассмотрим точку  $M$ , движущуюся прямолинейно под действием одной только **восстанавливающей силы**  $\vec{F}$ , направленной к неподвижному центру  $O$  и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы  $\vec{F}$  на ось  $Ox$  (рис.3) будет равна  $F_x = -cx$ .

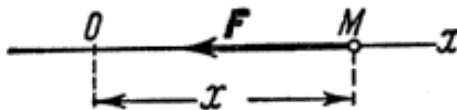


Рис. 3

Сила  $\vec{F}$ , как видим, стремится вернуть точку в равновесное положение  $O$ , где  $F=0$ ; отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости. Коэффициент  $c$  пропорциональности называется **жесткостью упругого элемента**.

Любая другая сила, неупругая по природе, но удовлетворяющая соотношению  $F = -cx$ , называется **квазиупругой**.

Найдем закон движения точки  $M$ . Составляя дифференциальное уравнение движения получим

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$$

Деля обе части равенства на  $m$  и вводя обозначение

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2$$

приведем уравнение к виду

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Уравнение представляет собою **дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии**

**сопротивления.** Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка ищут в виде  $x=e^{nt}$ . Полагая  $x=e^{nt}$ , получим для определения  $n$  так называемое характеристическое уравнение, имеющее в данном случае вид  $n^2 + \omega_0^2 = 0$ . Поскольку корни этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми ( $n_{1,2} = \pm ik$ ), то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение имеет вид

$$X = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования. Если вместо постоянных  $C_1$  и  $C_2$  ввести постоянные  $A$  и  $\alpha$ , такие, что  $C_1 = A \cos \alpha$ ,  $C_2 = A \sin \alpha$ , то мы получим

$$x = A(\sin \omega_0 t \cos \alpha + \cos \omega_0 t \sin \alpha)$$

или

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

Это другой вид решения, в котором постоянными интегрирования являются  $A$  и  $\alpha$ . Им удобнее пользоваться для общих исследований.

Скорость точки в рассматриваемом движении равна

$$v_x = \dot{x} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Несмотря на большое разнообразие колебательных процессов, все они совершаются по некоторым общим закономерностям и могут быть сведены к совокупности простейших периодических колебаний, называемых гармоническими.

Колебания, совершаемые точкой по закону косинуса или синуса называются **гармоническими колебаниями**.

Система, закон движения которой имеет такой вид, называется одномерным (линейным) классическим гармоническим осциллятором или сокращенно **гармоническим осциллятором**.

**Скорость и ускорение** гармонического осциллятора находят, взяв первую, а затем вторую производные от смещения  $x$ :

$$\begin{aligned}
 v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -v_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha) \\
 a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -a_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha) \\
 &= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) = -\omega_0^2 x
 \end{aligned}$$

Тогда сила

$$\begin{aligned}
 F = ma = m\ddot{x} &= -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -F_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha) = -m\omega_0^2 x \\
 &= -kx
 \end{aligned}$$

Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам: во – первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим; во – вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Всем характеристикам этого движения можно дать наглядную кинематическую интерпретацию. Рассмотрим точку  $B$ , движущуюся равномерно по окружности радиуса  $a$  из положения  $B_0$  определяемого углом  $\angle DOB = \alpha$  (рис. 4).

Пусть постоянная угловая скорость вращения радиуса  $OB$  равна  $\omega_0$ . Тогда в произвольный момент времени  $t$  угол  $\varphi = \angle DOB = \alpha + \omega_0 t$  и проекция  $M$  точки  $B$  на диаметр, перпендикулярный к  $DE$ , движется по закону  $x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$ , где  $x = OM$ , т.е. совершает гармонические колебания.

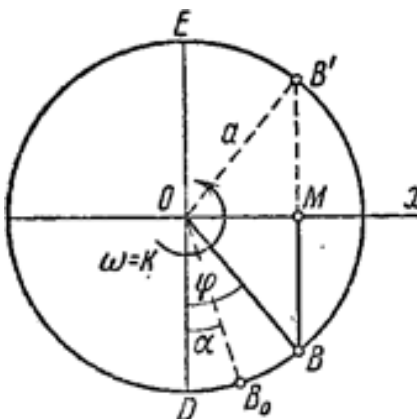


Рис. 4



Величина  $A$ , равная наибольшему отклонению точки  $M$  от центра колебаний, называется **амплитудой колебаний**. Величина  $\varphi = \alpha + \omega_0 t$  называется **фазой колебаний**.

Фаза колебания определяет смещение в момент времени  $t$ . Начальная фаза  $\alpha$  определяет смещение тела в момент начала отсчета времени.

*Фаза колебаний представляет собой угловую меру времени, прошедшего от начала колебаний.*

Колебания точки, происходящие с постоянной амплитудой, называют **незатухающими**, а колебания с постепенно уменьшающейся амплитудой – **затухающими**.

Величина  $k$ , совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса  $OB$ , показанного на рис. 4 называется **круговой (круговой) частотой колебаний**.

**Циклической или круговой частотой** периодических колебаний называется число полных колебаний, совершаемых за время  $2\pi$  с:

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T} [\text{рад/с}]$$

Промежуток времени  $T$  (или  $\tau$ ), в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**.

По истечении периода фаза изменяется на  $2\pi$ . Следовательно,  $kT = 2\pi$ , откуда период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Величина  $v$ , обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за одну секунду, называется **частотой колебаний**

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Отсюда видно, что величина  $k$  отличается от  $T$  только постоянным множителем  $2\pi$ . В дальнейшем мы обычно для краткости частотой колебаний будем называть величину  $k$ .

Единица частоты колебаний — **герц (Гц)**. **Герц** — это частота колебаний, период которых равен 1 с:  $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$ .

Если положение тела в любой момент времени может быть описано единственным параметром, то тело имеет одну степень свободы. Такое колеблющееся тело называют **одномерным осциллятором**.

Значения  $A$  и  $\alpha$  определяются по начальным условиям. Считая при  $t = 0$   $x = x_0$ ,  $v_x = v_0$  получим

$$x_0 = A \sin \alpha \quad \text{и} \quad \frac{v_0}{k} = A \cos \alpha$$

Отсюда, складывая сначала квадраты этих равенств, а затем деля их почленно, найдем:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_0 x_0}{v_0}$$

Отметим, что свободные колебания при отсутствии сопротивления обладают следующими свойствами: 1) амплитуда и начальная фаза колебаний **зависят** от начальных условий; 2) частота  $k$ , а следовательно, и период  $T$  колебаний от начальных условий **не зависят**.

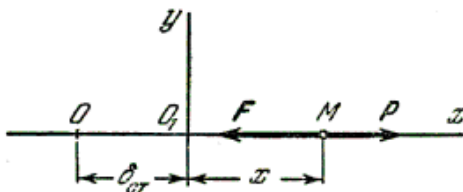


Рис. 5

### 3.2. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки.

Пусть на точку  $M$ , кроме восстанавливающей силы  $F$ , направленной к центру  $O$ , действует еще постоянная по модулю и направлению сила  $P$  (рис.5). Величина  $F$  по прежнему пропорциональна расстоянию от центра  $O$ , т.е.  $A = c \cdot OM$ .

Очевидно, что в этом случае положением равновесия точки  $M$  будет центр  $O_1$  отстоящий от  $O$  на расстоянии  $OO_1 = \delta_{ст}$ , которое определяется равенством  $c \cdot \delta_{ст} = P$  или

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{P}{c}$$

Величину  $\delta_{\text{ст}}$  назовем **статическим отклонением** точки. Примем центр  $O_1$  за начало отсчета и направим координатную ось  $O_1x$  в сторону действия силы  $\vec{P}$ . Тогда  $F_x = -c(x + \delta_{\text{ст}})$ ,  $P_x = P$ . В результате, составляя дифференциальное уравнение движения, будем иметь:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx \text{ или } m \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Отсюда заключаем, что **постоянная сила  $P$  не изменяет характера колебаний, совершаемых точкой под действием восстанавливающей силы  $F$ , а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы  $P$  на величину статического отклонения  $\delta_{\text{ст}}$**

**Физический маятник.** Представляет собой твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс (центр тяжести) тела (рис. 6).

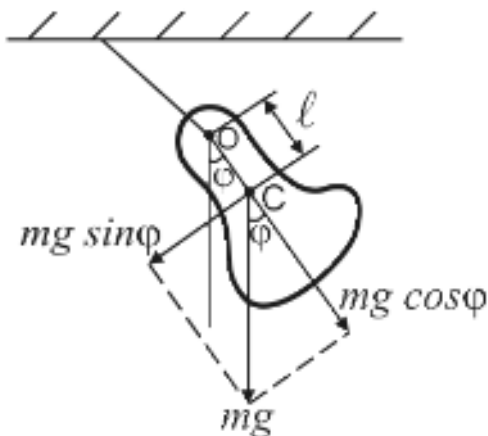


Рис. 6

Колебания маятника, как и в случае математического маятника, совершаются под действием силы тяжести:

$$mg \sin \varphi \approx mg \varphi$$

Если маятник отклонить на некоторый угол  $\varphi$  от положения равновесия, то на него будет действовать момент силы:

$$M = mgl \sin \varphi l$$

(или для малых углов  $M = mgl \varphi$ ), возвращающий его в исходное положение, где  $l$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до центра тяжести маятника –  $C$ .

Воспользовавшись основным уравнением динамики вращательного движения  $\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$ , запишем уравнение колебаний физического маятника:

$$-mgl \varphi = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \varphi = 0$$

Решением этого уравнения является выражение вида

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$  – частота собственных колебаний маятника.

Таким образом, маятник будет совершать гармонические колебания, период которых определяется выражением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

**Приведенная длина** физического маятника ( $l_{\text{пр}}$ ) – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}$$

**Математический маятник.** Это модель, в которой вся масса сосредоточена в материальной точке, колеблющейся на невесомой и недеформируемой нити по дуге окружности в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 7).

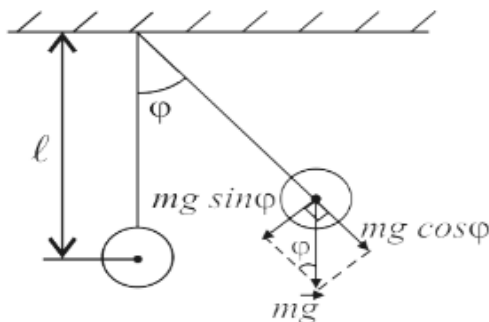


Рис. 7

Момент силы, действующей на маятник равен,

$$M = -mgl \sin \varphi$$

Знак « - » указывает, что момент силы противоположен направлению поворота. Так как угол  $\varphi$  мал, то  $\sin \varphi \approx \varphi$  и  $M = -mgl\varphi$ .

Основное уравнение динамики для вращающегося тела имеет вид

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}$$

Для математического маятника момент инерции  $J = ml^2$ , а угловое ускорение  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . Тогда как уравнение движения математического маятника запишется

$$-mgl\varphi = ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого является

$$\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где частота собственных колебаний маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , т.е. период собственных колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Выражение определено только для малых углов  $\varphi$ .

**Пружинный маятник.** Это система, состоящая из груза массы  $m$ , прикрепленного к пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с массой груза.

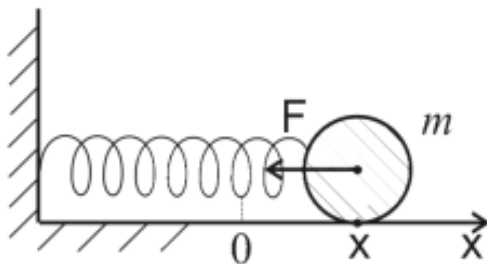


Рис. 8

При малом смещении шарика вправо относительно положения равновесия (рис. 8) на него действует возвращающая сила  $F$  – сила упругости, пропорциональная смещению  $x$  и направленная к положению равновесия:

$$F = -kx,$$

где  $k$  – коэффициент упругости [Н/м].

Уравнение движения пружинного маятника определяется вторым законом Ньютона:

$$F = ma$$

Так как  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  то уравнение движения шарика примет вид

$$-kx = \frac{d^2x}{dt^2} m$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

где  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\omega_0$  – круговая частота собственных колебаний.

Следовательно, период собственных колебаний пружинного маятника будет определяться выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{или} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Запишем общий вид дифференциального уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$$

Решением этого уравнения является функция  $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , что можно проверить подстановкой. График  $x(t)$  приведен на рисунке 9.

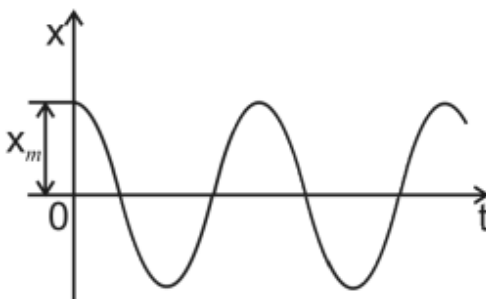


Рис. 9

Свойствами маятников широко пользуются в различных приборах (в часах, в приборах для определения ускорения свободного падения, ускорений движущихся тел, колебаний земной коры, в гироскопических устройствах, в приборах для экспериментального определения момента инерции тел).

### 3.3. Сложение колебаний

Векторная диаграмма колебаний. Решение многих вопросов, в том числе сложение нескольких колебаний одного и того же направления, значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости (рис.10).

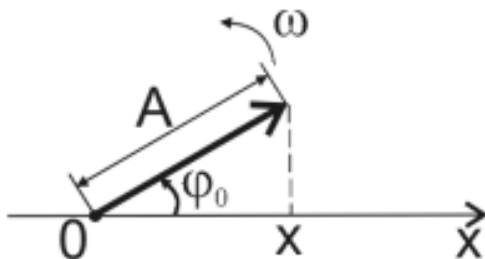


Рис.10

Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $x$  в пределах от  $+A$  до  $-A$ , причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Следовательно, гармоническое колебание может быть задано с помощью вращающегося вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью  $x$  угол  $\varphi$ , равный начальной фазе колебания. Вращение вектора  $x$  может быть задано уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t.$$

#### 3.3.1. Сложение колебаний одного направления. Биения.

Возможны случаи, когда тело участвует одновременно в нескольких колебательных процессах, происходящих вдоль одного и того же направления. Например, шарик, подвешенный на пружине к потолку вагона, качающегося на рессорах, участвует в собственных колебаниях относительно вагона и в колебаниях вагона отно-



сительно Земли. Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты, но с различными начальными фазами и амплитудами:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

Представим оба колебания на векторной диаграмме и построим по правилам сложения векторов результирующий вектор  $\vec{A}$  (рис. 11).

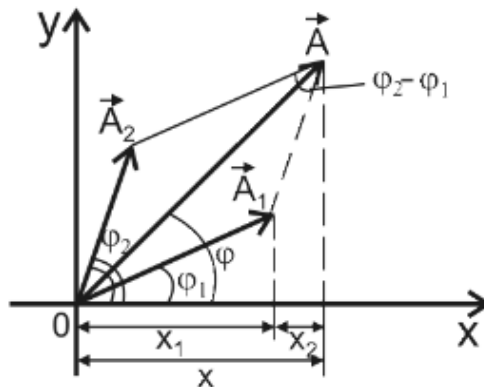


Рис. 11

Так как проекция  $\vec{A}$  на ось  $x$  равна сумме проекций слагаемых векторов, следовательно, вектор  $\vec{A}$  представляет собой результирующее гармоническое колебание той же частоты  $\omega$ , с амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\varphi$ . Из построения видно, что по теореме косинусов можно записать:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))$$

или

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Итак, при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты, направленных по одной и той же прямой, результирующее движение – также гармоническое колебание с той же частотой  $\omega$  и с амплитудой  $A$ , лежащей в пределах

$$(A_1 - A_2) \leq A \leq (A_1 + A_2).$$

Если фазы обоих колебаний одинаковы  $\varphi_2 = \varphi_1$ , то амплитуды колебаний просто складываются  $A = A_1 + A_2$ .

Если  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ , то колебания находятся в противофазе, и  $A = |A_1 - A_2|$ , в частности, если  $A_1 = A_2$ , то  $A = 0$ , т.е. оба колебания взаимно уничтожаются.

**Биеениями** называют периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами (рис.12) ( $T$  – период биеения).

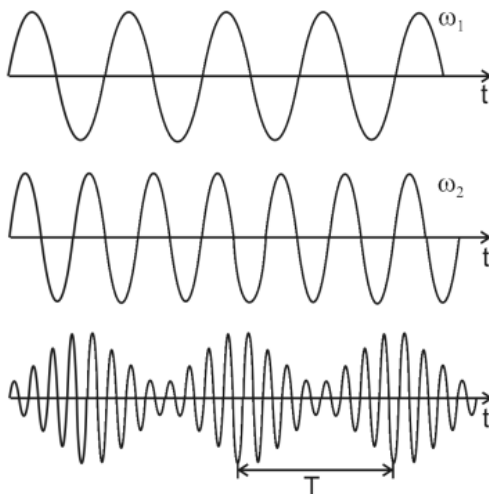


Рис. 12

Биеение возникает вследствие того, что разность фаз между двумя колебаниями с различными частотами все время изменяется так, что оба колебания оказываются в какой – то момент времени в фазе, через некоторое время – в противофазе, затем снова в фазе и т.д. Если  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды двух накладываются колебаний, то при одинаковых фазах колебаний амплитуда достигает наибольшего значения  $A = A_1 + A_2$ , а когда фазы колебаний противоположны, амплитуда падает до наименьшего значения  $A_1 - A_2$ . В

простейшем случае, когда амплитуды обоих колебаний равны, их сумма достигает значения  $2A$  при одинаковых фазах колебаний и падает до нуля, когда они противоположны по фазе.

Результат наложения колебаний можно записать в виде

$$A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – циклические частоты двух накладываются гармонических колебаний.

Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  мало различаются, то величину  $|2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t|$  в уравнении можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду (огибающую) колебания, происходящего по закону  $\cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$

Частота  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$  называется циклической частотой биений.

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$  – период биений.

По мере сближения частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  частота биения  $\Omega$  уменьшается, исчезая при  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  («нулевые» биения). Определение частоты биения между измеряемым и эталонным колебаниями – один из наиболее точных методов измерения частоты, широко применяемый на практике. Метод биений применяют для измерения емкости, индуктивности, для настройки музыкальных инструментов, при анализе слухового восприятия и т.д.

### 3.3.2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Рассмотрим систему, обладающую двумя степенями свободы, т.е. такую систему, для задания положения которой нужны две координаты.

На рисунке 13,а тяжелый шарик, подвешенный на легкой длинной пружине, совершает маятникообразные колебания в одной плоскости. Если растянуть и отпустить пружину, то шарик будет двигаться по некоторой сложной траектории, участвуя в двух колебаниях.

На рисунке 13,б показан тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Этот шарик может совершать одновременно колебания во взаимноперпендикулярных направлениях, причем частоты колебаний одинаковы, в этом случае вид колебаний будет зависеть от разности фаз обоих колебаний.

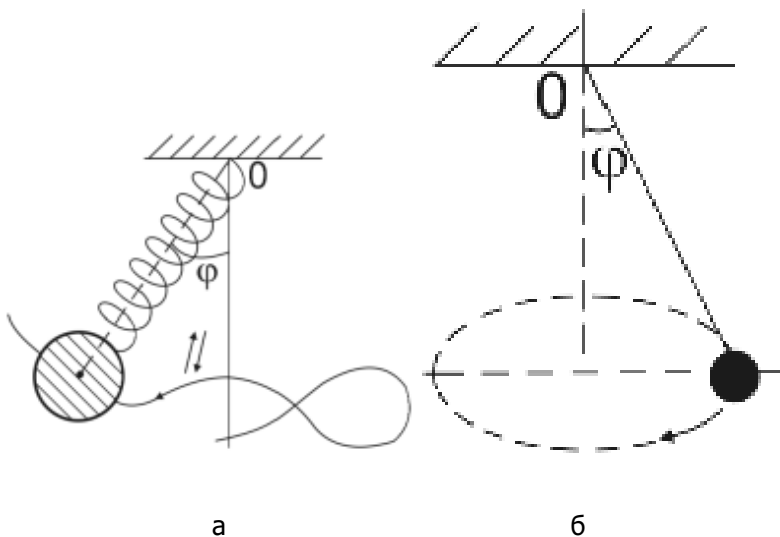


Рис.13

Рассмотрим результат сложения взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной и той же частоты  $\omega$ , совершающихся вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ . Уравнения этих колебаний запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega t \\y &= B \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

где  $\varphi$  – разность фаз колебаний.

Чтобы получить уравнение траектории точки, нужно исключить из этих уравнений параметр  $t$ . Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}$$

тогда с учетом, что  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ , можно записать

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$\frac{y}{B} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi$$

Подставим  $\sin\omega t$  и  $\cos\omega t$  и избавимся от корня:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

Как известно из аналитической геометрии, полученное уравнение является уравнением эллипса, ориентация и значение полуосей которого относительно осей  $x$  и  $y$  зависит от амплитуд  $A$  и  $B$  и разности фаз  $\varphi$ . Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях.

1.  $\varphi = 0$ . В этом случае уравнение примет вид

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad y = \frac{B}{A}x$$

Это уравнение прямой, следовательно, в этом случае точка движется по прямой (рис. 14).

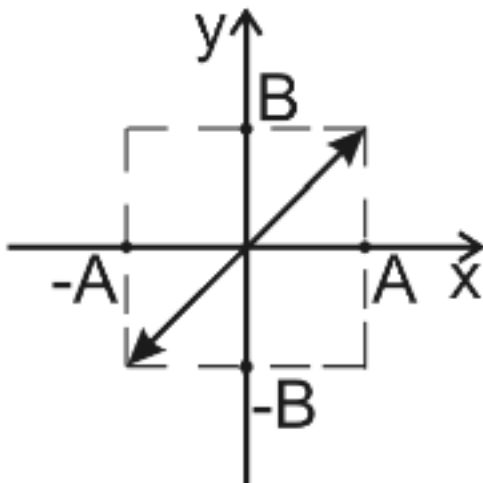


Рис. 14

2.  $\varphi = \pm\pi$ . Уравнение траектории примет вид

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{B}{A}x$$

т.е. в этом случае точка гармонически колеблется вдоль прямой (рис. 15).

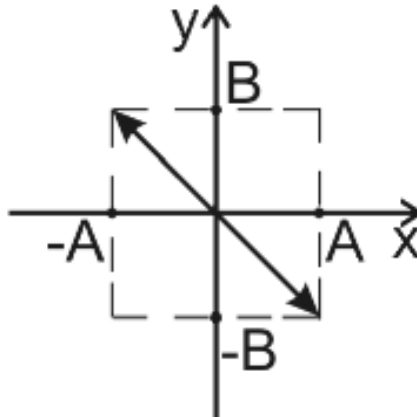


Рис. 15

3. При  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  уравнение траектории примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Это уравнение эллипса, полуоси которого равны соответствующим амплитудам колебаний. Если  $A = B$ , эллипс вырождается в окружность; при  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$  движение происходит по часовой стрелке, при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  точка движется по эллипсу против часовой стрелки (рис. 16).

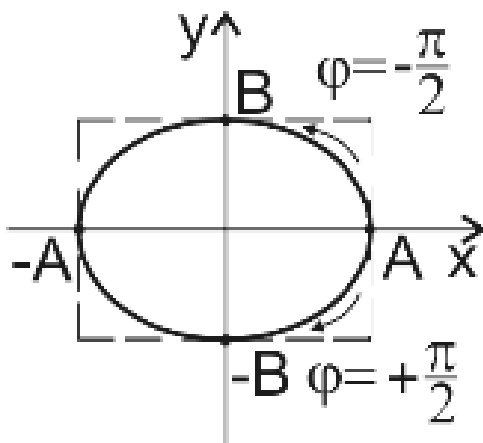


Рис. 16

### 3.3.3. Свободные затухающие колебания.

Реально свободные колебания под действием сил сопротивления всегда *затухают*. Объясняется это действием сил, тормозящих движение, например, сил трения в месте подвеса при колебаниях маятника, или силой сопротивления среды. В этом случае энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против этих сил. Поэтому свободные колебания под действием сил сопротивления всегда затухают. Затухание нарушает периодичность колебаний, потому они уже не являются периодическим процессом

Пусть точка совершает линейное гармоническое колебание в вязкой среде. Из опыта известно, что сила сопротивления среды зависит от скорости и направлена в сторону, противоположную скорости. При малых скоростях:

$$F_{\text{соп}} = -rv = -r \frac{dx}{dt}$$

где  $r$  – постоянная величина, называемая **коэффициентом сопротивления среды**.

Уравнение колебаний:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

Введем обозначения:

$$\frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

тогда дифференциальное уравнение затухающего колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания,  $\omega_0$  – собственная частота колебания. При отсутствии трения  $\beta=0$ , уравнение примет вид уравнения для свободных незатухающих колебаний. В результате решения уравнения получим зависимость смещения  $x$  от времени, то есть уравнение затухающего колебательного движения:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Выражение  $A_0 e^{-\beta t}$  называется амплитудой затухающего колебания. Амплитуда уменьшается по экспоненциальному характеру с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. Огибающая на графике зависит от  $\beta$ . Чем она больше, тем круче огибающая, то есть колебания быстрее затухают (рис. 17).



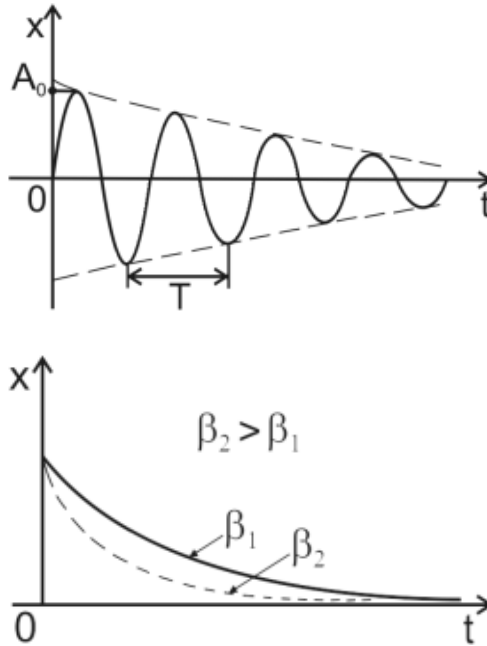


Рис. 17

Путем подстановки функции и ее производных по времени в уравнение, можно найти значение угловой частоты:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

С увеличением трения период колебаний возрастает, а при  $\beta = \omega_0$  период  $T \rightarrow \infty$ . При дальнейшем увеличении  $\beta$  период становится мнимым, а движение точки **апериодическим** – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (рис. 18).

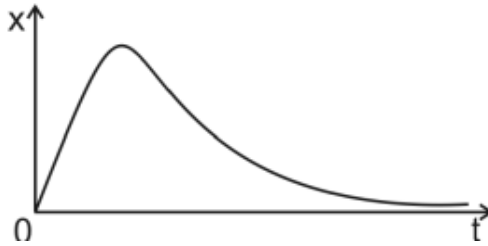


Рис. 18

Критическое затухание («успокоение») имеет большое значение в измерительных приборах, таких как баллистические гальванометры, которые испытывают резкие импульсивные воздействия в положении нулевого смещения.

Наглядной характеристикой затухания является отношение значений двух амплитуд, соответствующих промежутку времени в один период. Это отношение называют **декрементом затухания**  $\theta$ :

$$\theta = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

Его натуральный логарифм есть безразмерная величина, называемая **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\delta = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T$$

**Логарифмический декремент затухания** – величина, обратная числу колебаний  $N$ , по истечении которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Промежуток времени  $\tau = \frac{1}{\beta}$ , в течение которого амплитуда затухающего колебания убывает в  $e$  раз, называют **временем релаксации**.

Тогда выражение для логарифмического декремента затухания примет вид:

$$\delta = \frac{T}{\tau} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{1}{N}$$

**Добротность** колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\delta}$$

### 3.4. Свободные колебания в поле постоянной силы.

На материальную точку кроме упругой силы, действует сила постоянная по величине и направлению.

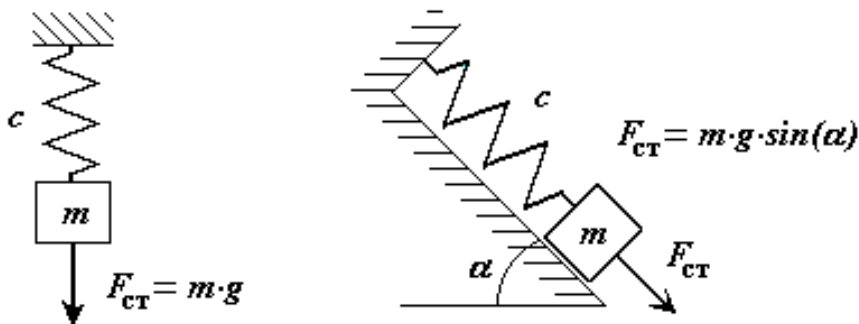


Рис. 19

Обозначим ее  $F_{ст}$  (рис.19), тогда дифференциальное уравнение движения точки примет вид:

$$mx + cx = F_{ст} \quad \text{или} \quad x + \omega^2 x = \frac{F_{ст}}{m}, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Начальные условия имеют вид:

при  $t=0$   $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$

Это неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение складывается из решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Решение имеет вид:

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_{ст}}{c} \right) \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_{ст}}{c}$$

Если начало отсчета координаты сдвинуть на  $x_{ст} = \frac{F_{ст}}{c}$ ,  $x_1 = x - x_{ст}$  (рис.20), тогда в новой системе отсчета решение будет иметь вид:

$$x_1(t) = x_{10} \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad x_1(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{x_{10}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} - \text{амплитуда колебаний;}$$

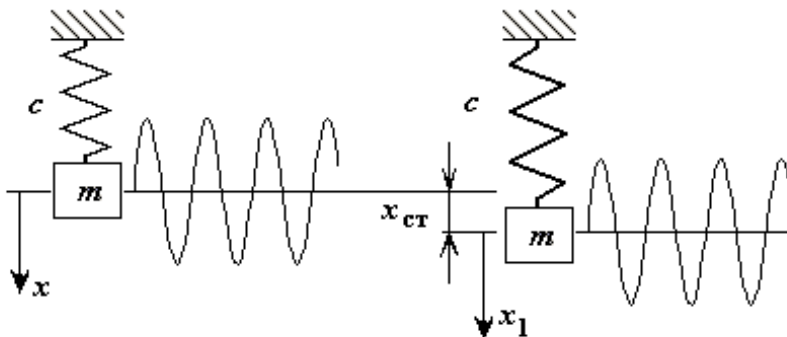


Рис. 20

### 3.5. Параллельное включение упругих элементов.

Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных параллельно (рис.21).

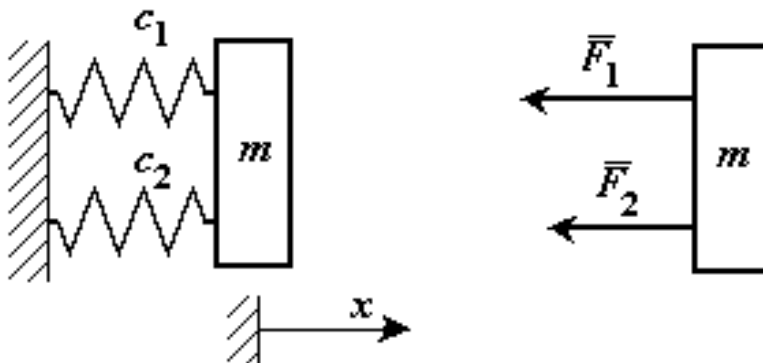


Рис. 21

Сместим массу на расстояние  $x$ .

$$F_1 = -c_1 x, \quad F_2 = -c_2 x$$

$$F = F_1 + F_2 = -(c_1 + c_2)x = -c_{\Sigma} x$$

Результирующая жесткость упругих элементов расположенных параллельно равна сумме жесткостей этих элементов.

### 3.6. Последовательное включение упругих элементов.

Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных последовательно (рис.22).

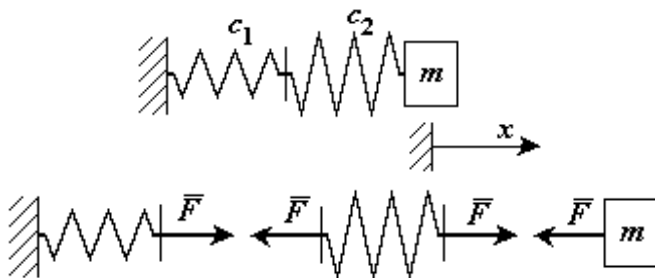


Рис. 22

Сместим массу на расстояние  $x$ . В упругих элементах возникает восстанавливающая (упругая) сила  $F$ , одинаковая для обоих элементов (рис.22). Первый упругий элемент изменит длину на  $x_1$ , второй – на  $x_2$ .

$$x = x_1 + x_2, \quad F = -c_1 x, \quad F = -c_2 x, \quad F = -c_{\Sigma} x$$

$$x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{c_1} - \frac{F}{c_2} = -\frac{F}{c_{\Sigma}}$$

$$\frac{1}{c_{\Sigma}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Обратная величина результирующей жесткости упругих элементов расположенных последовательно равна сумме обратных величин жесткостей этих элементов.

### 3.7. Вынужденные колебания. Резонанс.

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих, когда на точку, кроме восстанавливающей силы  $\vec{F}$ , действует еще периодически изменяющаяся со временем сила  $\vec{Q}$ , проекция которой на ось  $Ox$  равна

$$Q = Q_0 \sin pt$$

Эта сила называется **возмущающей силой**, а колебания, происходящие при действии такой силы, называются **вынужденными**. Величина  $P$  является **частотой возмущающей силы**.

Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда  $Q_x$  определяется указанным равенством. Такая возмущающая сила называется **гармонической**.

Рассмотрим движение точки, на которую, кроме восстанавливающей силы  $\vec{F}$ , действует только возмущающая сила  $\vec{Q}$ . Дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + Q_0 \sin pt$$

Разделим обе части этого уравнения на  $m$  и положим  $\frac{Q_0}{m} = P_0$ , тогда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = P_0 \sin pt$$

Уравнение является **дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления**. Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  – общее решение уравнения без правой части, а  $x_2$  – какое –нибудь частное решение полного уравнения.

Полагая, что  $p = k$ , будем искать решение  $x_2$  в виде

$$x_2 = A \sin pt$$

где  $A$  – постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство обратилось в тождество. Подставляя значение  $x_2$  и его второй производной в уравнение будем иметь:

$$-pA\sin pt + k^2A\sin pt = P_0\sin pt$$

Это равенство будет выполняться при любом  $t$ , если  $A(k^2 - p^2) = P_0$  или

$$A = \frac{P_0}{\omega_0^2 - p^2}$$

Таким образом, искомое общее решение будет

$$x = A\sin(\omega_0 + \alpha) + \frac{P_0}{\omega_0^2 - p^2}\sin pt$$

где  $A$  и  $\alpha$  – постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение показывает, что колебания точки складываются в этом случае из:

- 1) колебаний с амплитудой  $A$  (зависящей от начальных условий) и частотой  $k$ , называемых **собственными колебаниями**, и
- 2) колебаний с амплитудой  $A$  (не зависящей от начальных условий) и частотой  $p$ , которые называются **вынужденными колебаниями**

График вынужденных колебаний показан на рис.23.

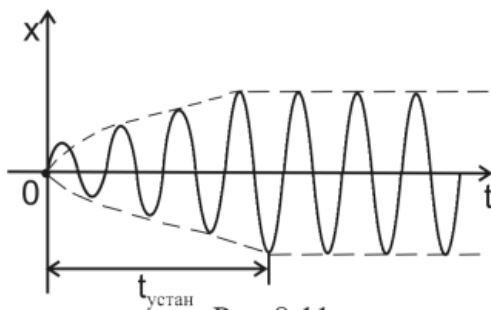


Рис. 23

Частота  $p$  вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на  $k^2$ , можно представить в виде:

$$A = \frac{P_0}{|\omega_0^2 - p^2|} = \frac{\delta_0}{|1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2|}$$

где  $\delta_0$  есть величина статического отклонения точки под действием силы  $Q_0$ . Как видим,  $A$  зависит от отношения частоты  $p$  возмущающей силы к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний.

Подбирая различные соотношения между  $p$  и  $\omega_0$ , можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При  $p=0$  амплитуда равна  $\delta_0$  (или близка к этой величине). Если величина  $p$  близка к  $\omega_0$ , амплитуда  $A$  становится очень большой. Когда  $p \gg \omega_0$ , амплитуда  $A$  становится очень малой (практически близка к нулю).

**Резонанс.** При вынужденных колебаниях в случае, когда  $p = \omega_0$ , т.е. когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление резонанса (резкое возрастание амплитуды колебаний системы). Размахи вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать так, как показано на рис.24. При резонансе наступают наиболее благоприятные условия для поступления энергии в колеблющуюся систему от источника внешней силы. Увеличение амплитуды происходит до тех пор, пока вся работа внешней силы не сравняется с энергией потерь. В реальных условиях всегда существуют факторы, ограничивающие амплитуду колебаний и определяющие возможность существования резонанса. Это, прежде всего, рассеивание (диссипация) энергии в системе и неточное совпадение частоты вынуждающей силы с собственной частотой системы.

### Амплитуда при резонансе

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

и **резонансная частота**

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



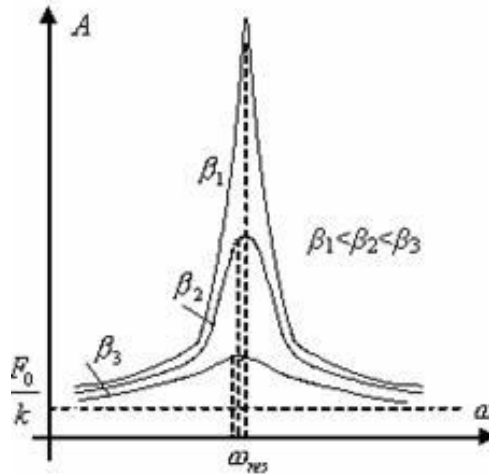


Рис. 24

Резонанс играет большую роль в природе, науке и технике. Резонанс сооружений и машин при периодических внешних воздействиях может являться причиной катастроф. Чтобы избежать резонансного воздействия, подбирают соответствующим образом свойства системы или используют успокоители колебаний, основанные на явлении антрирезонанса. В радиотехнике благодаря резонансу можно отделить сигналы одной (нужной) радио – или телестанции от всех других.

### 3.8. Свободные колебания с вязким сопротивлением.

Существуют устройства (демпферы), которые создают силу пропорциональную относительной скорости  $F_d = -b\dot{x}$  (рис. 25). Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом демпфирования или коэффициентом вязкого сопротивления.

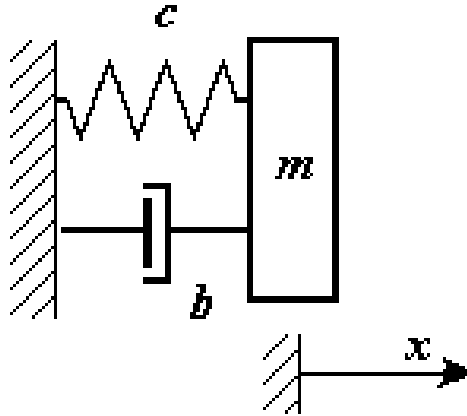


Рис. 25

Дифференциальное уравнение движения точки с массой  $m$ , закрепленной на упругом элементе и демпфере имеет вид:

$$m\ddot{x} = F_y + F_d$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{где } \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad 2n = \frac{b}{m}$$

Начальные условия имеют вид:  $t=0, x(0) = x_0, v(0) = v_0$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0$$

Корни характеристического уравнения равны:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

Рассмотрим возможные решения:

1 – й случай  $\lambda_{1,2} = -n \pm i\omega_1$

Решение имеет вид:

$$x(t) = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

$Ae^{-nt}$  – условная амплитуда затухающих колебаний;

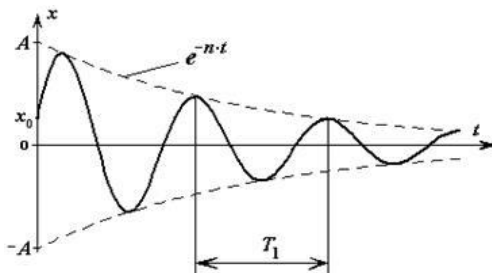


Рис. 26

$\omega_1$  – круговая или циклическая частота затухающих колебаний. Измеряется в рад/сек.

$\alpha$  – фазовый угол (или просто фаза).

$T_1 = 2\frac{\pi}{\omega_1} > T = 2\frac{\pi}{\omega}$  – период затухающих колебаний (рис. 26).

$\nu_1 = \frac{1}{T_1}$  – частота колебаний (1 колеб/сек=1 Гц)

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой  $\omega_1$  и амплитудой, величина которой все время убывает.

Движение изображающей точки на фазовой плоскости показано на рис. 27.

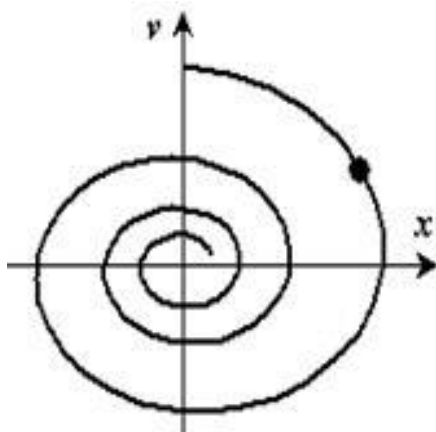


Рис. 27

2 – й случай  $\lambda_{1,2} = -n \pm \omega_2$

Решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$$

Материальная точка совершает затухающее неколебательное движение (рис.28).

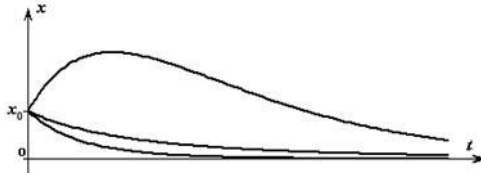


Рис. 28

3 – й случай  $\lambda_{1,2} = -n$  (два одинаковых корня)

Решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$$

Материальная точка так же совершает затухающее неколебательное движение (рис.28).

### 3.9. Вынужденные колебания с вязким сопротивлением.

Рассмотрим движение точки под действием трех сил: одна восстанавливающая сила, вторая – сила демпфирования (сила вязкого сопротивления), а третья зависит от времени.  $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$  – гармоническая возмущающая сила.

$F_0$  – амплитуда возмущающей силы.

$\omega$  – круговая частота возмущающей силы.

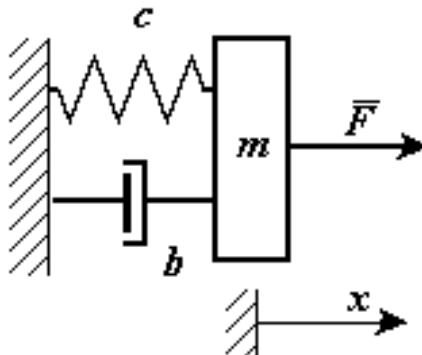


Рис.29

Дифференциальное уравнение движения точки с массой  $m$ , закрепленной на упругом элементе и демпфере (рис.29), под действием возмущающей гармонической силы имеет вид:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 e^{i\omega t}$$

Решение уравнения имеет вид:  $x(t) = A e^{i\omega t}$

$A = \frac{F_0/m}{\Omega^2 - \omega^2 + i\omega 2n}$  – амплитуда вынужденных колебаний.

$\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота собственных колебаний

Материальная точка колеблется с амплитудой  $A$  и частотой возмущающей силы  $\omega$ .

Построим зависимость модуля амплитуды  $|A|$  от частоты возмущающей силы  $\omega$  (рис.30).

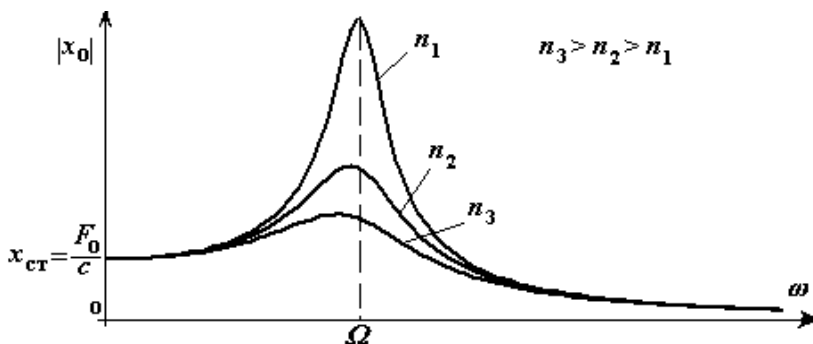


Рис.30

Модуль амплитуды вынужденных колебаний возрастает до некоторой величины, а затем убывает до нуля.

## 4. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Второй закон динамики и полученные на него выше уравнения и теоремы верны только для так называемого абсолютного движения точки, т. е. движения по отношению к инерциальной («неподвижной») системе отсчета.

Обратимся теперь к изучению относительного движения точки, т. е. движения по отношению к неинерциальным, произвольно движущимся по отношению к инерциальной системам отсчета.

Рассмотрим материальную точку  $M$ , движущуюся под действием приложенных к ней сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , являющихся результатом взаимодействия точки с другими материальными телами. Будем изучать движение этой точки по отношению к осям  $Oxyz$  (рис. 31), которые в свою очередь каким – то известным нам образом движутся относительно инерциальной системы отсчета (неподвижных осей)  $O_1x_1y_1z_1$

Найдем зависимость между относительным ускорением точки  $\vec{a}_{от}$  и действующими на нее силами. Для абсолютного движения основной закон динамики имеет вид

$$m\vec{a}_аб = \sum \vec{F}_k$$

Но из кинематики известно, что  $\vec{a}_{аб} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$  где  $\vec{a}_{от}, \vec{a}_{пер}, \vec{a}_{кор}$  — относительное, переносное и кориолисово ускорения точки. Подставляя это значение  $\vec{a}_{аб}$  в равенство и считая в дальнейшем  $\vec{a}_{от} = \vec{a}$ , так как эта величина представляет собой ускорение изучаемого нами относительного движения, получим

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + (-m\vec{a}_{пер}) + (-m\vec{a}_{кор})$$

Введем обозначения:

$$\vec{F}_{пер}^и = -m\vec{a}_{пер}, \vec{F}_{кор}^и = -m\vec{a}_{кор}$$

Величины  $\vec{F}_{пер}^и, \vec{F}_{кор}^и$  имеют размерность силы. Назовем их соответственно переносной и кориолисовой силами инерции. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \vec{F}_{пер}^и + \vec{F}_{кор}^и$$

Полученное уравнение выражает основной закон динамики для относительного движения точки. Все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции. Прибавление сил  $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$  и  $\vec{F}_{\text{кор}}^{\text{и}}$  учитывает влияние на относительное движение точки перемещения подвижных осей.

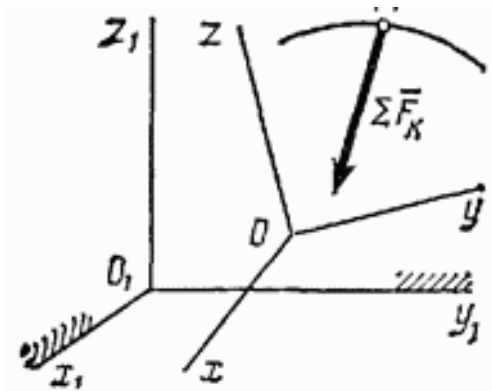


Рис. 31

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если подвижные оси движутся поступательно, то  $\vec{F}_{\text{кор}}^{\text{и}} = 0$ , так как в этом случае  $\vec{\omega} = 0$  ( $\vec{\omega}$  — угловая скорость вращения подвижных осей  $Oxyz$ ), и закон относительного движения принимает вид

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \vec{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$$

2. Если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то  $\vec{F}_{\text{пер}}^{\text{и}} = \vec{F}_{\text{кор}}^{\text{и}}$  и закон относительного движения будет иметь такой же вид, как и закон движения по отношению к неподвижным осям. Следовательно, такая система отсчета также будет инерциальной.

Из полученного результата вытекает, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная си-

стема отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движения. В этом состоит открытый еще Галилеем принцип относительности классической механики.

3. Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое, то для нее  $\vec{a} = 0$  и  $\vec{v}_{от} = \vec{v} = 0$ , а следовательно, и  $\vec{F}_{кор}^и = 0$ , так как кориолисово ускорение  $\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{от})$ . Тогда равенство принимает вид

$$\sum \vec{F}_k + \vec{F}_{пер}^и = 0$$

Это уравнение относительного равновесия (покоя) точки. Из него следует, что уравнения относительного равновесия составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить переносную силу инерции.

4. При составлении уравнений относительного движения в случаях, когда  $\vec{F}_{кор}^и \neq 0$ , надо иметь в виду, что

$$\vec{F}_{кор}^и = -m\vec{a}_{кор} = -2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{от})$$

Следовательно, сила  $\vec{F}_{кор}^и$  перпендикулярна  $\vec{v}_{от} = \vec{v}$ , а значит, и касательной к относительной траектории точки. Поэтому:

а) проекция кориолисовой силы инерции на касательную  $M_\tau$  к относительной траектории точки всегда равна нулю и уравнение относительного движения будет иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} = \sum \vec{F}_{k\tau} + \vec{F}_{пер\tau}^и$$

б) работа кориолисовой силы инерции на любом относительном перемещении равна нулю, и теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении будет иметь вид

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k + A(\vec{F}_{пер}^и)$$

где  $v_1$  и  $v_0$  — значения относительных скоростей,  $A$  — работа на относительном перемещении)

Последние слагаемые в правых частях равенств учитывают влияние движения подвижных осей на изменение величины  $v$

Во все остальные уравнения относительного движения будут в общем случае входить и переносная, и кориолисова силы инерции.



## 5. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ.

### 5.1. Момент инерции тела относительно оси, радиус инерции.

При исследовании движений системы недостаточно знать ее массу и положение центра масс, необходимо определять и другие характеристики распределения масс.

Движение тел существенным образом зависит от величины и характера распределения масс. Так, например, величина массы тела непосредственно характеризует инертность при его поступательном движении. При вращательном движении мерой инертности тела является его момент инертности относительно оси вращения, определяющей характер распределения масс.

Моментом инерции механической системы (тела) относительно точки  $O$  (полярным моментом инерции) называется сумма произведений масс всех точек системы на квадрат их расстояния до точки  $O$  (рис. 32):

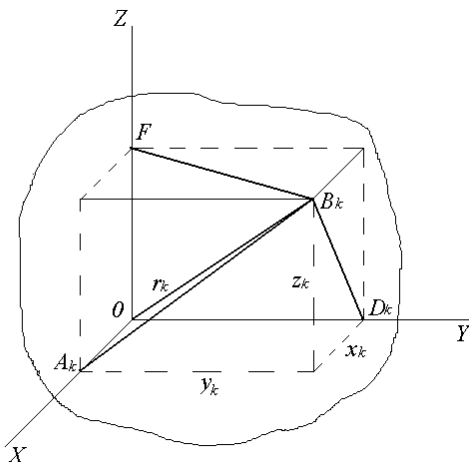


Рис. 32

$$Y_0 = \sum m_k r_k^2$$

$$Y_0 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$$

Моментом инерции системы (тела) относительно оси  $(x, y, z)$  называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек системы (тела) на квадраты их расстояний до этой оси.

$$Y_x = \sum m_k (A_k B_k)^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

$$Y_y = \sum m_k (B_k D_k)^2 = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2)$$

$$Y_z = \sum m_k (B_k F_k)^2 = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2)$$

Момент инерции системы (тела) относительно плоскости

$$Y_{xoy} = \sum m_k Z_k^2$$

$$Y_{yoz} = \sum m_k X_k^2$$

$$Y_{zox} = \sum m_k Y_k^2$$

Отсюда

$$Y_x + Y_y + Y_z = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \sum m_k (z_k^2 + y_k^2) + \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) =$$

$$= \sum m_k (2z_k^2 + 2x_k^2 + 2y_k^2) = \underbrace{2 \sum m_k (z_k^2 + x_k^2 + y_k^2)}_{Y_0} = 2Y_0$$

$$Y_x + Y_y + Y_z = 2Y_0$$

Момент инерции тела относительно оси можно представить в виде произведения массы тела на квадрат радиуса инерции тела относительно этой оси:

$$Y_z = M \rho_{ин}^2$$

Радиус инерции равен расстоянию от оси до той точки, в которой надо мысленно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

## 5.2. Теорема Гюйгенса.

Теорема. Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между этими осями (рис. 33)

$$Y_{z_1} = Y_z + Md^2$$

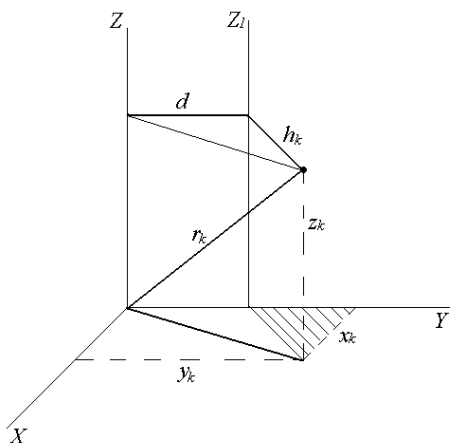


Рис. 33

Доказательство

$$Y_z = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2)$$

$$Y_{z_1} = \sum m_k h_k^2$$

из  $\Delta$ .  $h_k^2 = x_k^2 + (y_k - d)^2 = x_k^2 + y_k^2 - 2kd - d^2$

Подставляем  $h_k^2$  и получаем

$$Y_{z_1} = \underbrace{\sum m_k (x_k^2 + y_k^2)}_{Y_z} - 2d \sum m_k y_k - \underbrace{\sum m_k d^2}_{Md^2}$$

$$2d \sum m_k y_k = 0 \quad \text{т.к.}$$

$$2d \sum m_k y_k = My_c \quad \text{из} \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}$$

$$y_c = 0 \quad (\text{т.к. ось } z \text{ проходит через центр масс})$$

Следовательно

$$Y_{z1} = Y_z + Md^2$$

Теорема доказана

### 5.3. Определение моментов инерции некоторых однородных тел

#### 1) Тонкий однородный стержень (рис. 34)

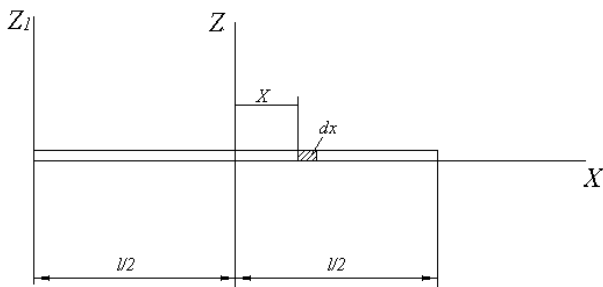


Рис. 34

Дано:  $l, M$ .

Определить  $Y_z, Y_{z1}$ .

Для элементарного отрезка длины  $dx$ ,  $h = x$ , а масса

$$dm = \frac{M}{l} dx, \quad dY_z = dm x^2 = \frac{M}{l} dx x^2$$

$$Y_z = \frac{M}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{M}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{Ml^2}{12}$$

$$Y_{z1} = Y_z + Md^2 = \frac{Ml^2}{12} + M \frac{l^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$$

- 2)** Тонкое круглое однородное кольцо радиусом  $R$  и массой  $M$  (рис.35)

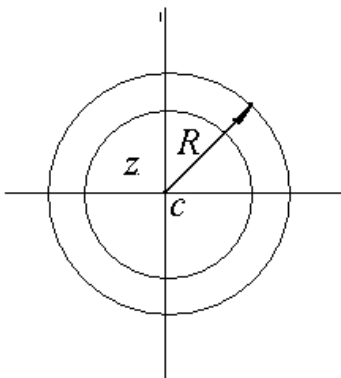


Рис. 35

Дано:  $M, R$ .  
Определить  $Y_z$

$$Y_z = \sum m_k R^2 = R^2 \sum m_k = MR^2$$

- 3)** Круглый однородный диск (рис. 36)

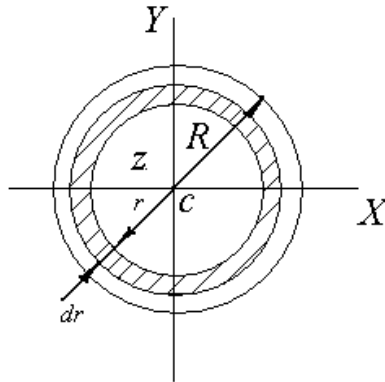


Рис. 36

Выделим элементарное кольцо радиусом  $r$  и  $dr$ . Площадь этого кольца  $2\pi r dr$ , а масса

$$dm = \left( \frac{M}{\pi R^2} \right) 2\pi r dr$$

$\left( \frac{M}{\pi R^2} \right)$  – масса единицы площади пластины.

Тогда для элементарного кольца

$$dY_{c_z} = dm r^2$$

$$Y_{c_z} = \left( \frac{M}{\pi R^2} \right) 2\pi r dr r^2 = \frac{M 2r^3}{R^2} dr$$

для всей пластины получим

$$Y_{c_z} = \frac{M 2}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}$$

## 6. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. ИМПУЛЬС СИЛЫ

Одной из основных динамических характеристик движения точки является количество движения

Количеством движения материальной точки называется векторная величина  $mv$ , равная произведению массы точки на ее скорость. Направлен вектор  $mv$  так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Единицей измерения количества движения является Нс (ньютон на секунду).

Импульс силы. Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Сначала введем понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за элементарный промежуток времени  $dt$ .

Элементарным импульсом силы называется векторная величина  $d\vec{S}$  равная произведению силы  $\vec{F}$  на элементарный промежуток времени  $dt$

$$d\vec{S} = \vec{F} dt$$

Направлен элементарный импульс вдоль линии действия силы.

Импульс  $\vec{S}$  любой силы  $\vec{F}$  за конечный промежуток времени вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных импульсов, т. е.

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt$$

Следовательно, импульс силы за некоторый промежуток времени  $t_1$  равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до  $t_1$

В частном случае, если сила  $\vec{F}$  постоянна и по модулю, и по направлению ( $\vec{F} = \text{const}$ ), то  $\vec{S} = \vec{F}t_1$ . Причем в этом случае и модуль  $S = Ft_1$  В общем случае модуль импульса может быть вычислен по его проекциям на координатные оси:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, S_z = \int_0^{t_1} F_z dt,$$

Единицей измерения импульса силы, как и количества движения, является Нс

### 6.1. Теорема об изменении количества движения точки

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k$$

Уравнение выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил.

Пусть движущаяся точка имеет в момент времени  $t = 0$  скорость  $\vec{v}_0$  а в момент  $t_1$  — скорость  $\vec{v}_1$ . Умножим тогда обе части равенства на  $dt$  и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интеграла будут 0 и  $t_1$ , а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}_1$ .

Так как интеграл от  $d(m\vec{v})$  равен  $m\vec{v}$ , то в результате получим

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k dt$$

Стоящие справа интегралы представляют собой импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будет

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

При решении задач вместо векторного уравнения часто пользуются уравнениями в проекциях. Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим



$$\begin{aligned}mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum S_{kx} \\mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum S_{ky} \\mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum S_{kz}\end{aligned}$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси  $Ox$  теорема выражается первым из этих уравнений.

Зная как при движении точки изменяется ее скорость, можно определить импульс действующих сил (первая задача динамики) или, зная импульсы действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики).

## 6.2. Теорема об изменении момента количества движения.

Пусть точка  $M$  массой  $m$  движется по некоторой кривой под действием силы  $\vec{F}$ . Построим вектор  $\vec{m}_O$ , изображающий момент силы  $\vec{F}$  относительно начала координат  $O$ .

Из статики известно, что этот вектор направлен перпендикулярно к плоскости треугольника, который получим, соединив начало и конец вектора  $\vec{F}$  с точкой  $O$ , и по модулю равен удвоенной площади этого треугольника.

Проекции  $m_{Ox}, m_{Oy}, m_{Oz}$  этого вектора на координатные оси равны моментам силы  $\vec{F}$  относительно этих осей.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  можно представить в виде векторного произведения радиуса – вектора  $\vec{r}$  точки  $M$  на силу  $\vec{F}$ , т. е.

$$\vec{m}_O = \vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Аналогично мы можем построить вектор  $\vec{L}_O$ , изображающий момент количества движения  $m\vec{v}$  относительно точки  $O$ . Этот вектор перпендикулярен плоскости треугольника, который получим, соединяя начало и конец вектора  $m\vec{v}$  с точкой  $O$ , а по модулю равен удвоенной площади этого треугольника, причем, смотря с конца вектора  $\vec{L}_O$  на этот треугольник, мы должны видеть вектор  $m\vec{v}$  направленным против часовой стрелки относительно точки  $O$ .

Момент количества движения относительно точки  $O$  мы можем представить так же, как и момент силы, в виде векторного произведения радиуса – вектора  $\vec{r}$  на вектор  $m\vec{v}$

$$\vec{L}_O = \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Между моментом количества движения  $m\vec{v}$  относительно данной точки  $O$  и моментом относительно какой – нибудь оси, проходящей через эту точку, существует такая же зависимость, как и между теми же моментами силы  $\vec{F}$ . Поэтому проекции вектора  $\vec{L}_O$  на координатные оси равны моментам количества движения относительно этих осей:

$$L_{ox} = m_x(m\vec{v}), \quad L_{oy} = m_y(m\vec{v}), \quad L_{oz} = m_z(m\vec{v})$$

В статике были получены следующие формулы для моментов силы относительно координатных осей:

$$m_{ox} = m_x(\vec{F}) = yZ - zY$$

$$m_{oy} = m_y(\vec{F}) = zX - xZ$$

$$m_{oz} = m_z(\vec{F}) = xY - yX$$

Здесь  $X, Y, Z$  обозначают проекции силы  $\vec{F}$  на оси, а  $x, y, z$  – координаты точки приложения этой силы, т. е. в данном случае координаты движущейся точки.

Очевидно, что моменты количества движения относительно координатных осей мы можем вычислить по этим же формулам, но только проекции  $X, Y, Z$  вектора  $\vec{F}$  нужно заменить проекциями вектора  $m\vec{v}$  на те же оси. Получим:

$$m_x(m\vec{v}) = y \cdot mv_z - z \cdot mv_y = m(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt})$$

$$m_y(m\vec{v}) = z \cdot mv_x - x \cdot mv_z = m(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt})$$

$$m_z(m\vec{v}) = x \cdot mv_y - y \cdot mv_x = m(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt})$$

Теорема, доказательство которой мы приведем ниже, выражает зависимость между векторами  $\vec{m}_o(m\vec{v})$  и  $\vec{m}_o(\vec{F})$

Дифференцируя по  $t$  векторное равенство  $\vec{L}_O = \vec{m}_o(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$ , получим:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_o(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} m\vec{v}$$

но

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{F}$$

а потому

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_o(m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Но так как векторы  $\vec{v}$  и  $m\vec{v}$  коллинеарные, более того, направлены по одной прямой, то  $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$  и, следовательно,

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{m}_o(m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{m}_o(\vec{F})$$

или *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого –нибудь неподвижного центра  $O$  равна моменту действующей на эту точку силы относительно того же центра.*

Переписав равенство в виде:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{m}_o$$

спроецируем это равенство на координатные оси; так как проекция производной от данного вектора на какую –нибудь ось равна производной от проекции этого вектора на ту же ось, то получим:

$$\frac{dL_{ox}}{dt} = m_{ox}, \quad \frac{dL_{oy}}{dt} = m_{oy}, \quad \frac{dL_{oz}}{dt} = m_{oz}$$

Эти уравнения выражают теорему о моменте количества движения в координатной форме: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой –нибудь неподвижной оси равна моменту действующей на эту точку силы относительно той же оси.*

*Следствие 1.* Пусть момент действующей на материальную точку силы относительно оси  $Oz$  во все время движения остается равным нулю, т. е. сила и ось лежат в одной плоскости, а  $m_z(\vec{F}) = 0$ . Тогда получим:

$$\frac{d}{dt}m_z(m\vec{v}) = 0$$

откуда следует, что  $m_z(m\vec{v}) = const$ , т. е. если момент действующей силы, относительно какой – либо неподвижной оси все время движения равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой оси остается постоянным.

**Следствие 2.** Пусть линия действия силы  $\vec{F}$  все время проходит через одну и ту же неподвижную точку  $O$  (рис. 37). В этом случае сила называется центральной, а точка  $O$  называется центром этой силы. Тогда  $m_o(\vec{F}) = 0$  и, следовательно, на основании теоремы имеем:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{m}_o(m\vec{v}) = 0$$

а потому

$$\vec{L}_o = \vec{m}_o(m\vec{v}) = const$$

т. е. в случае центральной силы момент количества движения материальной точки относительно центра этой силы остается постоянным. Отсюда также следует, что под действием центральной силы точка описывает всегда плоскую траекторию, плоскость которой проходит через центр этой силы.

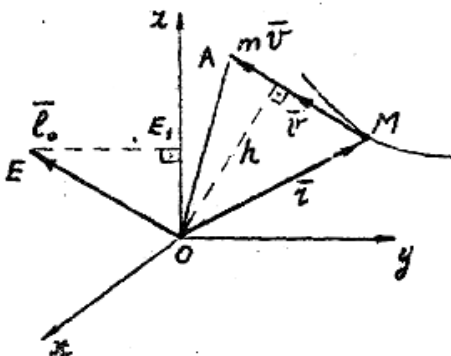


Рис.37

Момент количества движения твердого тела еще называют кинетическим моментом твердого тела.

## 7. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

### 7.1. Кинетический момент поступательно движущегося твердого тела

Пусть твердое тело движется поступательно и имеет скорость  $\vec{v}$ . Тогда

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Если начало координат выбрать в центре масс тела (центре тяжести), то

$$\vec{r} = 0 \text{ и } \vec{L}_O = 0$$

Итак, кинетический момент поступательно движущегося тела относительно его центра масс равен нулю.

### 7.2. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной точки О с угловой скоростью  $\omega$ . При этом скорость любой точки тела будет равна:

$$v = \omega \times r$$

Следовательно, кинетический момент твердого тела относительно точки О будет:

$$L_O = r \times mv = mr \times (\omega \times r)$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получим:

$$mr \times (\omega \times r) = mr^2 \omega - mr(\omega \cdot r)$$

Отсюда:

$$L_O = mr^2 \omega - mr(\omega \cdot r)$$

Проектируя векторы, входящие в последнее равенство, на оси неподвижной системы координат с началом в точке  $O$ , находим:

$$L_{ox} = \omega_x m(x^2 + y^2 + z^2) - mx(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)$$

или после преобразования

$$L_x = \omega_x m(y^2 + z^2) - \omega_y mxy + \omega_z mxz$$

Аналогично будем иметь:

$$L_y = \omega_y m(z^2 + x^2) - \omega_z myz + \omega_x mxy$$

$$L_z = \omega_z m(x^2 + y^2) - \omega_x mzx + \omega_y mzy$$

Произведение массы точки на квадрат ее расстояния от какой – либо оси называется моментом инерции этой точки относительно рассматриваемой оси. Сумма моментов инерции всех точек системы относительно некоторой оси называется моментом инерции системы относительно этой оси.

Замечая, что квадрат расстояния точки до осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  равен соответственно

$$d_x^2 = y^2 + z^2$$

$$d_y^2 = z^2 + x^2$$

$$d_z^2 = x^2 + y^2$$

закключаем, что величины

$$J_x = \sum m(y^2 + z^2)$$

$$J_y = \sum m(z^2 + x^2)$$

$$J_z = \sum m(x^2 + y^2)$$

представляют собой моменты инерции относительно осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Суммы

$$J_{xy} = mxy$$

$$J_{yz} = myz$$

$$J_{zx} = mzx$$

носят название центробежных моментов инерции. Пользуясь этими величинами, запишем проекции кинетического момента твердого тела в более компактном виде:

$$L_x = \omega_x J_x - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{zx}$$

$$L_y = \omega_y J_y - \omega_z J_{yz} - \omega_x J_{xy}$$

$$L_z = \omega_z J_z - \omega_x J_{zx} - \omega_y J_{yz}$$

### 7.3. Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Последние равенства могут служить для вычисления кинетического момента твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, так как это движение представляет собой частный случай вращения тела вокруг неподвижной точки. Направим ось  $z$  по оси вращения, тогда будем иметь:

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega$$

и, следовательно,

$$L_x = -\omega J_{zx}, \quad L_y = -\omega J_{yz}, \quad L_z = -\omega J_z$$

Отсюда

$$\vec{L} = -\omega(J_{zx}\vec{i} + J_{yz}\vec{j} + J_z\vec{k})$$

## 8. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Формулы можно использовать и при вычислении кинетического момента твердого тела в самом общем случае его движения. Действительно, общий случай движения твердого тела можно составить из поступательного движения, совершающегося со скоростью какой – либо его точки, и вращательного вокруг этой точки. Выбрав в качестве такой точки центр инерции системы и поместив в нем начало координатной системы  $x', y', z'$ , можно вычислить  $L = L_c$

### 8.1. Работа

*Кинетической энергией материальной точки* называется скалярная величина, равная по величине половине произведения массы движущейся точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия в технической системе единиц измеряется в килограммометрах (кгм).

Количество движения и кинетическая энергия являются основными мерами механического движения.

Прежде чем переходить к выводу теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки, рассмотрим понятие работы силы.

Пусть модуль силы  $\vec{F}$  – величина переменная. В этом случае для вычисления работы на пути  $s$  разобьем этот путь на большое число  $n$  очень малых участков. Значения модуля силы  $\vec{F}$  в начале каждого из этих участков обозначим соответственно через  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Так как участок очень мал, то величину  $F_i$  на этом участке приближенно можно считать постоянной (с тем большей точностью, чем меньше  $n$ ). Поэтому *элементарная работа* на пути будет равна

$$F_i ds_i \text{ или } - F_i ds_i$$

(Работа считается положительной, если направление силы  $\vec{F}$  совпадает с направлением движения точки. Если же сила направлена в сторону, противоположную движению точки, то работа считается отрицательной.)



Взяв сумму этих элементарных работ и переходя затем к пределу при  $ds_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , получим работу переменной силы на конечном пути  $s$ . В пределе сумма этих элементарных работ выразится определенным интегралом. Если обозначим работу через  $A$ , получим:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i ds_i = \int_0^s F ds$$

или

$$A = - \int_0^s F ds$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, модуль силы  $\vec{F}$  нужно выразить как функцию переменного  $s$ .

Работа, как и кинетическая энергия измеряется в килограммометрах (кгм).

*Частный случай.* Если точка приложения постоянной силы  $\vec{F}$  движется по прямой, совпадающей с линией действия силы, то работа этой силы равна произведению ее модуля  $F$  на длину пути  $s$ , пройденного точкой приложения силы, взятому с определенным знаком («плюс» или «минус»):

$$A = \pm F s$$

Рассмотрим, как вычисляется работа в случае криволинейного движения точки. Пусть точка приложения  $M$  силы  $\vec{F}$ , переменной как по величине, так и по направлению, описывает криволинейную траекторию.

Требуется определить работу этой силы на пути  $M_0 M_1 = s$ . Разобьем весь этот путь на большое число весьма малых участков; пусть один из таких элементарных участков есть  $MM' = ds$ . Разложим силу  $\vec{F}$  на две составляющие  $\vec{F}_\tau$  и  $\vec{F}_n$ , направленные соответственно по касательной и нормали к траектории в точке  $M$ .

Тогда элементарная работа силы  $\vec{F}$  на пути выражается произведением, взятым, так же как и в случае прямолинейного движения, со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, совпадает ли направление силы  $\vec{F}$  с направлением скорости  $\vec{v}$  точки при-

ложения этой силы или эта сила направлена в сторону, противоположную скорости  $\vec{v}$ . Если под  $F_v$  будем понимать проекцию силы  $\vec{F}$  на направление скорости  $\vec{v}$ , то, обозначая угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{v}$  через  $\varphi$ , получим:

$$F_v = F \cos \varphi = |\vec{F}_\tau|$$

или

$$F_v = F \cos \varphi = -|\vec{F}_\tau|$$

в зависимости от знака  $\cos \varphi$ . Элементарная работа в обоих случаях будет равна

$$\vec{F}_v d\vec{s} = F \cos \varphi ds$$

Если угол  $\varphi$  острый, то элементарная работа положительна. Если же этот угол тупой (в этом случае касательная сила  $\vec{F}_\tau$  направлена, очевидно, противоположно скорости  $\vec{v}$ ), то эта работа отрицательна.

Взяв сумму элементарных работ и переходя к пределу в предположении, что число  $n$  участков, на которые была разбита дуга  $M_0 M_1$ , неограниченно возрастает, а длина каждого участка  $ds_i$  стремится к нулю, получим работу силы  $\vec{F}$  на конечном пути от  $M_0$  до  $M_1$ :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_{iv} ds_i = \int_0^s F_v ds$$

или

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \cos \varphi_i ds_i = \int_0^s F \cos \varphi ds$$

Таким образом, *работа силы на конечном пути выражается криволинейным интегралом, взятым вдоль соответствующей дуги траектории, которую описывает точка приложения силы*. Если сила во все время движения перпендикулярна направлению скорости движения ее точки приложения, то работа этой силы равна нулю, так как в этом случае  $\varphi = 90^\circ$  и  $\cos \varphi = 0$

Докажем теперь теорему о работе равнодействующей силы.

Пусть к материальной точке  $M$  приложены две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , равнодействующая которых равна  $\vec{R}$ . Обозначим работу сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{R}$  на пути  $s$  соответственно через  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A$ .

Проецируя векторное равенство

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

на направление скорости точки  $M$ , получим:

$$R_v = F_{1v} + F_{2v}$$

Умножая обе части этого равенства на элемент пути  $ds$  и интегрируя в пределах от 0 до  $s$  (вдоль траектории точки  $M$ ), получим:

$$\int_0^s R_v ds = \int_0^s F_{1v} ds + \int_0^s F_{2v} ds$$

или

$$A = A_1 + A_2$$

Таким образом, приходим к теореме: *работа равнодействующей на некотором пути равна сумме работ составляющих сил на том же пути.*

## 8.2. Консервативные силы.

Силы, действующие на тело, могут быть консервативными и неконсервативными. Сила называется **консервативной** или **потенциальной**, если работа, совершаемая этой силой при перемещении материальной точки из одного положения в другое, **не зависит** от вида траектории (формы пути) и определяется только начальным и конечным положениями тела (рис. 38):  $A_{1B2} = A_{1C2} = A_{12}$ .

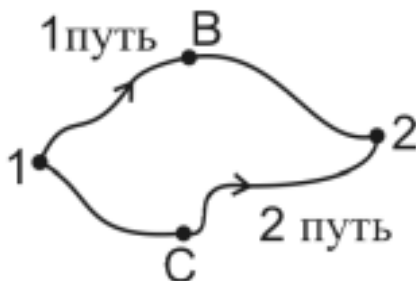


Рис.38

В случае, если тело движется в обратном направлении  $A_{12} = -A_{21}$ , т.е. изменение направления движения по траектории на противоположное вызывает изменение знака работы. Следовательно, при движении материальной точки по замкнутой траектории работа консервативной силы равна нулю (например, поднятие и опускание груза):

$$\oint F_l dl = A_{1C2} + A_{2C1} = 0$$

Консервативными силами являются силы гравитационного взаимодействия, силы упругости, электростатические силы. Силы, не удовлетворяющие условию, называются **неконсервативными**. К неконсервативным силам относят силы трения и сопротивления. Поле, в котором действуют консервативные силы, называется потенциальным.

### 8.3. Мощность.

**Мощностью** называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность

$$W = \frac{A}{t},$$

где  $t$  – время, в течение которого произведена работа  $A$ . В общем случае

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_{\tau} ds}{dt} = F_{\tau} V.$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость движения.

Единицей измерения мощности в системе СИ является **Ватт** (1 Вт = 1 Дж/сек). В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 кгМ/сек или 736 Вт.

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт – час (1 кВт – ч =  $3,6 \cdot 10^6$  Дж  $\approx 367100$  кгМ).

Из равенства  $W = F_{\tau} V$  видно, что у двигателя, имеющего данную мощность  $W$ , сила тяги  $F_{\tau}$  будет тем больше, чем меньше скорость движения  $V$ . Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигаться с меньшей скоростью и развивать большую силу тяги.

#### 8.4. Теорема об изменении кинетической энергии

Пусть материальная точка  $M$  массы  $m$  движется под действием силы  $\vec{F}$  по некоторой криволинейной траектории. Напишем основное уравнение динамики точки, выражающее второй закон Ньютона:  $\vec{F} = m\vec{a}$ ; проецируя это векторное равенство на направление скорости  $\vec{v}$ , получим:

$$ma_v = F_v$$

Как известно из кинематики,

$$a_v = \frac{dv}{dt}$$

следовательно,

$$m \frac{dv}{dt} = F_v = F \cos \varphi$$

где  $\varphi$  есть угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{v}$ . Умножая обе части этого равенства на  $v dt$ , получим:

$$mvdt = Fv\cos\varphi dt$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = v\cos\varphi dt$$

Правая часть этого равенства представляет собой элементарную работу силы  $\vec{F}$ ; следовательно, *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку*. Этот результат выражает теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме.

Интегрируя уравнение в соответствующих пределах, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

Равенство выражает теорему о кинетической энергии в конечной форме: *изменение кинетической энергии движущейся материальной точки равно работе приложенной к ней силы на пройденном этой точкой пути*.

Стоит отметить, если на движущуюся материальную точку действуют несколько сил, то в уравнении под  $A$  нужно понимать работу равнодействующей, равную сумме работ этих сил на данном пути.

## 8.5. Принцип Даламбера для материальной точки

Пусть  $M$  есть движущаяся *несвободная материальная точка*, то есть такая точка, движение которой ограничено некоторыми наперед заданными условиями,  $\vec{F}$  — заданная действующая на нее сила и  $\vec{N}$  — реакция связи.

Сложив силы  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$ , получим равнодействующую силу  $\vec{R}$ . Согласно основному закону динамики сила  $\vec{R}$  направлена вдоль ускорения  $\vec{a}$  точки  $M$  и по модулю равна  $ma$ , где  $m$  — масса точки  $M$ .

Представим теперь, что мы приложили в данный момент к точке  $M$  еще одну силу, имеющую тот же модуль, что и сила  $\vec{R}$  и направленную противоположно ускорению  $\vec{a}$ . Эта сила, равная по модулю произведению массы точки на модуль ее ускорения и направленная противоположно ускорению, называется *силой инерции* и определяется равенством:

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{a}$$

Очевидно, что силы  $\vec{R}$  и  $\vec{F}^{\text{ин}}$ , как равные по модулю и противоположно направленные, уравниваются; но так как  $\vec{R}$  — равнодействующая сил  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$ , то три силы  $\vec{F}^{\text{ин}}$ ,  $\vec{F}$  и  $\vec{N}$  также взаимно уравниваются, что может быть записано следующим образом:

$$\vec{F}^{\text{ин}} + \vec{F} + \vec{N} = 0$$

Таким образом, приходим к выводу: *при движении материальной точки в каждый данный момент заданная сила  $\vec{F}$ , реакция связи  $\vec{N}$  и сила инерции  $\vec{F}^{\text{ин}}$  взаимно уравниваются*. В этом и состоит принцип Даламбера для материальной точки.

Проецируя векторное равенство на координатные оси, получим проекции силы инерции на эти оси:

$$\begin{aligned} F_x^{\text{ин}} &= -ma_x = -m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y^{\text{ин}} &= -ma_y = -m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z^{\text{ин}} &= -ma_z = -m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

Аналогично, проецируя равенство на естественные оси, получим проекции силы инерции на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории:

$$\begin{aligned} F_\tau^{\text{ин}} &= -ma_\tau = -m \frac{dv}{dt} \\ F_n^{\text{ин}} &= -ma_n = -\frac{mv^2}{\rho} \\ F_b^{\text{ин}} &= -ma_b = -ma_b = 0 \end{aligned}$$

Составляющие силы инерции  $F_\tau^{\text{ин}}$  и  $F_n^{\text{ин}}$ , направленные по касательной и главной нормали соответственно, называются *касательной (или тангенциальной) и нормальной силами инерции*. Эти силы направлены противоположно соответствующим ускорениям  $a_\tau$  и  $a_n$ . Нормальная сила инерции иначе называется центробежной силой.

В общем случае, согласно закону равенства действия и противодействия, сила инерции является «противодействием» по отношению к силе  $\vec{R}$ , следовательно, в действительности сила инерции приложена не к самой движущейся точке  $M$ , а к тому телу, в результате взаимодействия с которым эта точка получает данное ускорение.